Dans toute la série, le plan complexe est muni d'un repère ON direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$).

EXERCICE N°1 : 40' 6 points

On donne les points A(-3 + i) et B(2 + 3i) et on pose $z' = \dfrac{z + 3 - i}{iz + 3 - 2i}$. Déterminer les ensembles suivants

1) $E_1 = \{ M(z) \in P / z' \in \mathbb{R} \}$. **2)** $E_2 = \{ M(z) \in P / z' \in i\mathbb{R} \}$. **3)** $E_3 = \{ M(z) \in P / z' \in \mathbb{R}_+ \}$.

4) $E_4 = \{ M(z) \in P / |z'| = 1 \}$. **5)** $E_5 = \left\{ M(z) \in P / |\bar{z} + i + 3| = |-6 + 4i - 2iz| \right\}$.

6) $E_6 = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(-3 \left(\bar{z} - 2 + 3i \right)^3 \right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \right\}$. **7)** $E_7 = \{ M(z) \in P / C(2), M(z) \text{ et } M'(z^2+2) \text{ alignés} \}$.

EXERCICE N°2 : 25' 4 points

Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -i et l'application f de P\{A} dans P qui à tout points M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{iz}{\bar{z} - 1}$.

1) Montrer que pour tout M ∈ P\{O,A}, $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}\right) \ [2\pi]$.

2) Déterminer alors l'ensemble ξ des points M tel que O, M et M' soient alignés.

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

4) Déduire de ce qui précède une construction du point M', image du point M d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

EXERCICE N°3 : 30' 4 points

Soient A(2); B(- i) et M(z) tel que $z \neq 2$ et soit f : M(z) → M' $\left(z' = \dfrac{2i\bar{z} + 2}{\bar{z} - 2} \right)$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{ 2 , -i \}$, on a : $\arg z' \equiv \dfrac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \ [2\pi]$

3) Déterminer l'ensemble E = { M (z) ∈ P / z' est réel }.

EXERCICE N°4 : 30' 4 points

Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = 2\cos\theta$ et $z_2 = \cos\theta + 1 + i\cos\theta$, $\theta \in [0 , \pi/2]$.

1) Déterminer l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie.

2) Montrer que pour tout réel $\theta \in [0 , \pi/2]$, on a $M_1M_2^2 = 2\left(\cos\theta - \dfrac{1}{2} \right)^2 + \dfrac{1}{2}$.

3) Pour quelle valeur de θ la distance $M_1 M_2$ est-elle minimale ?

EXERCICE N°5 : 30' 4 points

Dans le plan complexe P, on considère les points A(i) et B(-i). A tout point M, distinct de B, d'affixe z

On associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{1 - z}{1 - iz}$. **1) a)** Montrer que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$.

b) En déduire que si M appartient au cercle 𝒞 de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle 𝒞'?

2) a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \equiv \dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$.

b) En déduire que si M appartient à la droite D : y = x - 1 alors M' appartient à une droite D' que l'on déterminera.